2016年度 微積分

No. 1

Date '16・10・31

微積分第17回

積分定理
使い方

発散定理

Σ：閉曲面
Ω：囲まれる領域
ベクトル場 $\mathbb{f}$

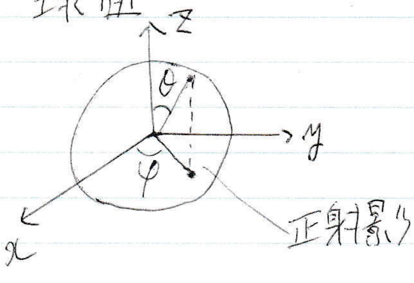
$$\boxed{\underbrace{\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S}}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_\Omega (\mathrm{div}\, \mathbb{f})\, dV}_{\text{体積分}}}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ というベクトル場を考える。

$\mathrm{div}\, \mathbb{r} = 1+1+1 = 3$
定値関数

原点中心　半径 a
球面



極座標 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$r = a$
$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

以前、面積分を計算したが、
今は定理を知っているので

$$3\underbrace{\boxed{\int_\Omega 1\, dV}}_{\Omega\text{の体積}} = 3\times\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

静電場

電荷 q —— $\mathbf{r}$

原点

万有引力 $G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

クーロン力 $k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

点 $\mathbf{r}$ の電荷が受ける力は、 $kq\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ $\quad \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\dfrac{1}{|\mathbf{r}|^2}$

$\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ の発散

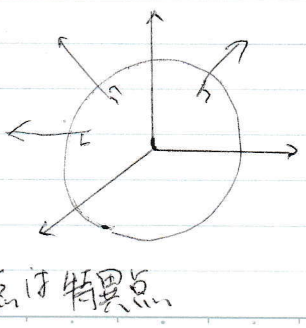
$$
\begin{aligned}
|\mathbf{r}| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
&= (x^2+y^2+z^2)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \end{pmatrix}
$$

発散を計算

$$
\begin{array}{rl}
 & (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \\
 & (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \\
+) & (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

原点中心、半径 a の球面 Σ を考えると…



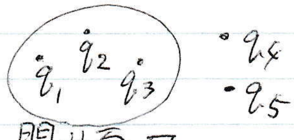
$$k\frac{q}{a^2}\times 4\pi a^2 = 4\pi kq$$

0にならない
(aによらない)

原点は特異点

◎ Σ で囲まれた全体で
ベクトル場が定義されていないといけない。
特異点、1点、のためにくずれる。

電荷がたくさんある場合



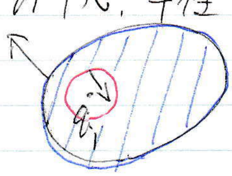
閉曲面Σ

重ね合わせの原理

電場 $\boldsymbol{f} = \underbrace{\boldsymbol{f}_1}_{q_1\text{だけで生じる電場}} + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_4 + \boldsymbol{f}_5$

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{S} = \underbrace{\int \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S}}_{\text{内部の特異点は隔離する}} + \cdots\cdots + \underbrace{\int \boldsymbol{f}_5\, d\boldsymbol{S}}_{\text{外部の点なので}0}$$

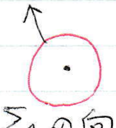
q_1中心, 半径εの球面Σ_1を考える.(隔離)



$\Sigma \cup \Sigma_1$ では $\int_{\Sigma\cup\Sigma_1} \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S} = 0$

$$\| $$

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S} \underbrace{-}_{\text{マイナス}} \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S}$$



Σ_1の向き

よって、

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}_1\, d\boldsymbol{S} = \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}_1\, d\boldsymbol{S} = 4\pi k q_1$$

したがって、電場全体では

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k q_1 + 4\pi k q_2 + 4\pi k q_3 + 0 + 0$$

$$= 4\pi k (q_1 + q_2 + q_3)$$

内部の電荷を足せばよい。　　Gaussの法則

report問題

$\dfrac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3}$ の発散は 0。　逆2乗の法則という。

$\parallel$

$\dfrac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|} \dfrac{1}{|\mathbb{r}|^2}$　逆2乗のときのみ発散が 0 となることを示せ。